

## 2.4.1 直线与圆锥曲线的交点(第一课时)

### ◆ 教学目标

- 1、结合实例，掌握直线与圆锥曲线的位置关系的判定方法，会运用数形结合的思想将交点问题转化为方程根的问题来研究。
- 2、能根据直线和圆锥曲线的位置关系求参数的值或范围。

### ◆ 教学重难点

**重点：**研究直线与圆锥曲线的位置关系及交点坐标。

**难点：**判断直线与圆锥曲线的交点个数以及利用交点个数求参数范围。

### ◆ 教学过程

#### 一、新课导入

前面我们已经学习了直线以及圆、椭圆、双曲线、抛物线等一系列的特殊曲线，通过平面直角坐标系，把圆锥曲线上的点和相应的圆锥曲线方程的解建立了一一对应的关系，判定直线与圆锥曲线交点的个数，可以通过作出图象来确定，上一章我们研究了直线与圆的位置关系以及直线与圆交点坐标的求法，类比这种方法，我们能研究直线与椭圆的位置关系吗？

**思考 1：**直线与椭圆的位置关系能借鉴直线与圆的位置关系进行判断吗？

几何法：

代数法：

#### 二、新知探究

**思考 2：**你能从几何图形的角度判断代数法能不能判断直线与椭圆的位置关系吗？

**问题 1：**如何判定直线 $y = kx + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的位置关系？

直线 $Ax + By + C = 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的位置关系：

$$\text{由方程组} \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow mx^2 + nx + p = 0 (m \neq 0)$$

消去 $y$ 得一个关于 $x$ 的一元二次方程，其中 $\Delta = n^2 - 4mp$

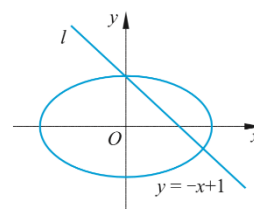
$\Delta$ 的取值	方程组解的个数	交点个数	直线与椭圆的位置关系
$\Delta > 0$	_____解	_____交点	_____
$\Delta = 0$	_____解	_____交点	_____
$\Delta < 0$	_____解	_____交点	_____

**追问：**若直线 $l$ 与椭圆 $C$ 两者相交，怎样求交点的坐标？

**问题 2：**如何判定直线 $l: y = kx + b$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 两者交点的个数？

### 三、应用举例

**例1** 如图，求直线 $l: y = -x + 1$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的交点坐标.



**变式训练1.**无论 $k$ 取何值，直线 $L: y = kx + 1$  与椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$

的交点情况满足（ ）

- A. 一个公共点                      B. 两个公共点  
B. 至少一个公共点              D. 无法确定

将题目中的直线换成  $y = kx + k$  或者  $y = kx + \sqrt{2}$ ，椭圆 $C$ 的方程不变，应该怎么做？

**总结：**除了代数法，也可通过观察直线是否过定点，通过定点位置判断直线与椭圆位置关系。

**例2** 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，若直线 $l: x - y + m = 0$ 与椭圆 $C$ 有唯一的公共点，求实数 $m$ 的值.

**变式训练1：**若将本题条件改成“直线与椭圆有两个公共点”或“没有公共点”， $m$ 的取值又将怎样变化？

**变式训练2：**根据例2的结论探究椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上的点到直线 $L: x - y + 6 = 0$ 到最小距离.

## 四、课堂练习

1. 已知直线  $l: x+y-3=0$ , 椭圆  $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ , 则直线与椭圆的位置关系是( )

A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 相切或相交

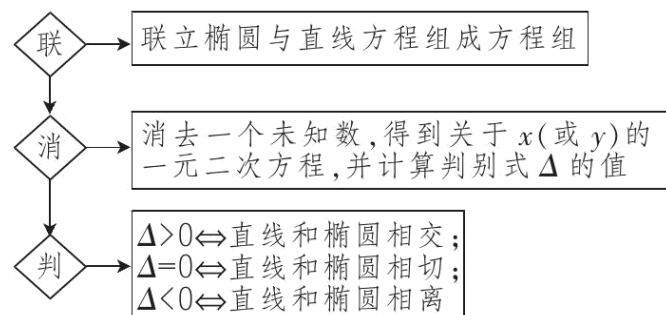
2. 直线  $y=kx-k+1(k \in \mathbf{R})$  与焦点在  $x$  轴上的椭圆  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$  总有公共点, 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

3. 判断直线  $y=2x-2$  与椭圆  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$  是否有公共点, 如有, 求出公共点的坐标.

4. 已知直线  $l: y=2x+m$ , 椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ . 试问当  $m$  取何值时, 直线  $l$  与椭圆  $C$ :

(1)有两个公共点; (2)有且只有一个公共点; (3)没有公共点.

**方法总结** 判断直线与椭圆的位置关系的方法：



## 五、总结回顾，梳理提升

通过本节课的学习，你有哪些收获？

1. 判定直线  $y=kx+m$  与椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的位置关系：

2. 若直线  $l$  与椭圆  $C$  两者相交，求交点的坐标：

## 六、课后拓展 稳步提升

1. 已知椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 直线  $l: x+my-m=0(m \in \mathbf{R})$ , 直线  $l$  与椭圆的位置关系是( )

A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 不确定

2. 经过点  $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  且与椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  相切的直线方程是( )
- A.  $x + 2\sqrt{3}y - 4 = 0$                       B.  $x - 2\sqrt{3}y - 4 = 0$   
 C.  $x + 2\sqrt{3}y - 2 = 0$                       D.  $x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$
3. 若直线  $y = kx + b$  与椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  恒有两个公共点, 则  $b$  的取值范围为( )
- A.  $(-2, 2)$                                       B.  $(0, 2)$   
 C.  $(4, 5)$                                       D.  $(6, 8)$
4. 以  $F_1(-1, 0)$ ,  $F_2(1, 0)$  为焦点且与直线  $x - y + 3 = 0$  有公共点的椭圆中, 离心率最大的椭圆方程是( )
- A.  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{19} = 1$               B.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$               C.  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$               D.  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$
5. (多选) 直线  $y = x + 2$  与椭圆  $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{3} = 1$  有两个公共点, 则  $m$  的值可以为( )
- A. 0    B. 1    C. 2    D. 5
6. 已知斜率为 2 的直线经过椭圆  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$  的右焦点  $F_2$ , 与椭圆相交于  $A, B$  两点, 则线段  $AB$  的中点  $P$  的坐标为\_\_\_\_\_.
7. 在椭圆  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$  上找一点  $P$ , 使  $P$  点到直线  $2x - 4y - 31 = 0$  的距离最小, 则取得最小值时点  $P$  的坐标是\_\_\_\_\_, 最小值为\_\_\_\_\_.
8. 已知点  $P$  为直线  $ax + y - 4 = 0$  上一点,  $PA, PB$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 0)$  的两条切线, 若恰好存在一点  $P$  使得  $PA \perp PB$ , 则椭圆  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.
9. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ , 直线  $L: 4x - 5y + 40 = 0$ , 请问椭圆上是否存在一点, 它到直线  $L$  的距离最小? 最小距离为多少? 最大距离呢?